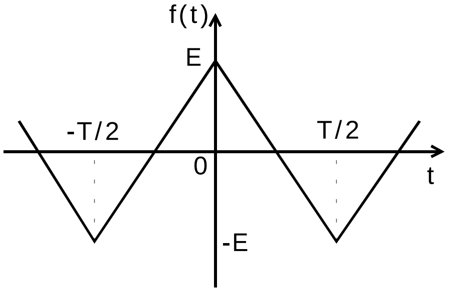
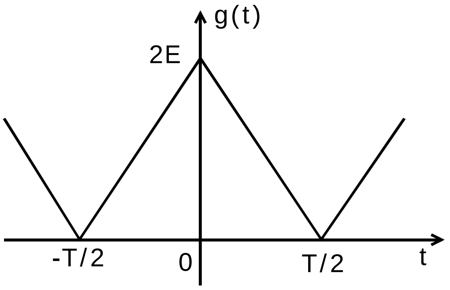
-EXERCICE 0 bis.1-

• ENONCE :

« Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire »

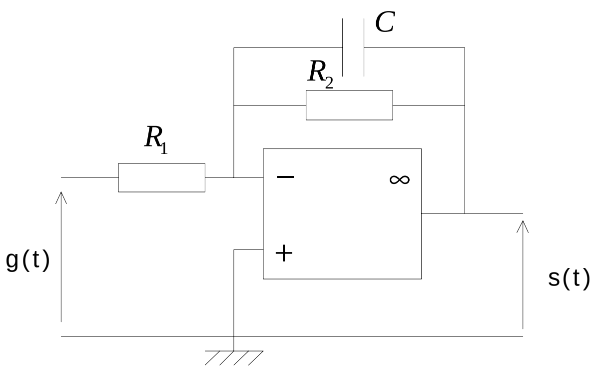


1) Donner le développement en série de Fourier du signal triangulaire ci-contre.



2) En déduire le développement en série de Fourier du signal ci-contre.

3) On réalise le montage suivant :



On donne : $C = 1\mu F$; $R_1 = 1k\Omega$; $R_2 = 10k\Omega$

La période de g(t) vaut : $T = 10^{-5} s$

Que vaut approximativement la tension s(t) ? Commenter quantitativement la simplification effectuée.

Rq : l'A.O est parfait et fonctionne en régime linéaire.

• **<u>CORRIGE</u>** :

« Décomposition en série de Fourier d'un signal triangulaire »

1) • Le signal $f(t)$ peut s'écrire : $f(t) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right)$, avec $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

• Compte tenu de l'égalité des aires positives et négatives, la **valeur moyenne** de $f(t)$ est **nulle** $\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{a_0}{2} = 0}$.

• La fonction $f(t)$ étant **paire**, tous les coefficients b_n sont **nuls**.

• La symétrie de **glissement** permet d'affirmer que les termes **pairs** du développement sont **nuls**, et que l'on peut simplifier le calcul des coefficients impairs selon :

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{4}{T} \times \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t) dt$$

• Sur l'intervalle $[0, T/2]$, on peut écrire : $f(t) = E - \dfrac{2E}{T/2} \times t = E - \dfrac{4E}{T} \times t$; il vient alors :

$$a_n = \frac{4E}{T} \times \int_0^{T/2} \cos(n\omega t) dt - \frac{16E}{T^2} \times \int_0^{T/2} t \times \cos(n\omega t) dt$$

• Or : $\displaystyle\int_0^{T/2} \cos(n\omega t) dt = \frac{[\sin(n\omega t)]_0^{T/2}}{n\omega} = \frac{\sin(n\pi) - 0}{n\omega} = 0$; par ailleurs, une **intégration par parties** conduit à :

$$\int_0^{T/2} t \times \cos(n\omega t) dt = \left[\frac{t \times \sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T/2} - \int_0^{T/2} \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} dt = 0 + \left[\frac{\cos(n\omega t)}{n^2\omega^2} \right]_0^{T/2} = -\frac{2}{n^2\omega^2} \quad (n \text{ est impair})$$

• On en déduit alors : $a_n = a_{2k+1} = \dfrac{32E}{(n\omega T)^2} \Rightarrow \boxed{a_{k+1} = \dfrac{8E}{(2k+1)^2 \pi^2}}$

• On peut alors écrire : $\boxed{f(t) = \dfrac{8E}{\pi^2} \times \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\cos[(2k+1)\omega t]}{(2k+1)^2}}$

2) Le signal g(t) étant obtenu par simple **translation**, d'amplitude E, du signal f(t), il vient :

$$\boxed{g(t) = E + f(t) = E + \frac{8E}{\pi^2} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)\omega t]}{(2k+1)^2}}$$

3) L'A.O étant parfait, le courant entrant dans l'entrée inverseuse, soit i_-, est nul ; le théorème de Millman appliqué sur cette même entrée fournit :

$$v_- = v_+ = 0 = \frac{\dfrac{\underline{g}}{R_1} + \dfrac{\underline{s}}{R_2} + jC\omega \underline{s}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + jC\omega} \Rightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{g}} = -\frac{1}{R_1} \times \frac{1}{\dfrac{1}{R_2} + jC\omega} = -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{1}{1 + jR_2C\omega}}$$

• Le montage constitue donc un filtre passe-bas du premier ordre, de fréquence de coupure f_C :

$$\boxed{f_C = \frac{1}{2\pi R_2 C} \simeq 16 Hz}$$

• La fréquence f_1 du fondamental (ou « premier harmonique ») de g(t) correspond à $n=1$, et vaut donc : $f_1 = \frac{1}{T} = 10^5 Hz \gg f_C$ $\Rightarrow$ tous les harmoniques seront filtrés par le montage, et la tension s(t) sera **constante**, égale à la **valeur moyenne** de g(t), multipliée par le gain statique du filtre $H_0 = -\frac{R_2}{R_1} = -10$; on en déduit : $\boxed{s(t) = cste = -10 \times E}$ (1)

• Concrètement, on peut calculer l'amplitude du premier harmonique de sortie $s_1(t)$ selon :

$S_1 =$ amplitude de $s_1(t) = |\underline{s}_1| = |\underline{H}(j\omega_1)| \times |\underline{g}_1|$, où $|\underline{g}_1|$ représente l'amplitude du premier harmonique du signal g(t) ; il vient donc :

$$S_1 = \frac{8E}{\pi^2} \times \frac{10}{\sqrt{1+\left(\frac{f_1}{f_C}\right)^2}} \simeq \frac{8E}{\pi^2} \times \frac{10}{\frac{f_1}{f_C}} = 1,29.10^{-3} \times E \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{S_1}{10 \times E} = 1,29.10^{-4}}$$

• Le résultat précédent permet donc de considérer le résultat (1) comme précis à $0,01\%$ près.